SISTEMES LINEALS AMB DUES INCÒGNITES

1.DISCUSIÓ DE SISTEMES
2.SISTEMES COMPATIBLES DETERMINATS
3.SISTEMES COMPATIBLES INDETERMINATS

DISCUSIÓ i RESOLUCIÓ DE SISTEMES

En tota equació lineal $a\,x + b\,y = c$ *els punts* (x , y) *pertanyen a una mateixa recta que expressada en forma explícita té per equació:*

$y = m\,x + n$ *on* m *és la pendent i* n *el terme independent*

Primer cas:

Si dues rectes tenen la mateixa pendent m *i el mateix terme independent* n *aleshores coincideixen i la seva intersecció són tots els punts de la recta. En aquest cas direm que el sistema lineal format per les dues equacions és compatible indeterminat S .C .I amb infinites solucions*

que en funció d'un paràmetre t *són:*

$$\begin{cases} x = t \\ y = mt + n \end{cases}$$

Ex.1

Discutiu i resoleu el sistema: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

Solució:

Primera recta $y = -x + 2$ $m = -1 n = 2$

Segona recta $y = -x + 2$ $m = -1 n = 2$

Sistema compatible indeterminat S. C. I.

(infinites solucions) Solucions: $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases}$

Segon cas:

Si dues rectes tenen la mateixa pendent m i diferent terme independent n aleshores les rectes són paral·leles i la seva intersecció no dona cap resultat. En aquest cas el sistema format per les dues equacions és incompatible S. I. amb cap solució.

Ex.2

Discutiu i resoleu el sistema: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$

Discussió:

Primera recta $y = -x + 2$ $m = -1$ $n = 2$

Segona recta $y = -x + 4$ $m = -1$ $n = 4$

Sistema incompatible S. I. (cap solució)

Tercer cas:

Si dues rectes tenen diferent pendent m aleshores les rectes es tallen en un sol punt i el sistema és compatible determinat S. C. D. amb única solució i per determinar aquesta solució s'utilitzen els mètodes de: Substitució Reducció Igualació

Ex.3

Discutiu i resoleu el sistema: $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -x + y = -1 \end{cases}$

Discussió:

Primera recta $y = -3/2x + 3/2$ $m = -3/2$

Segona recta $y = x - 1$ $m = 1$

Sistema compatible determinat S. C. D. (única solució)

RESOLUCIÓ:

a) Mètode de substitució

Aïllem la variable y de l'equació més fàcil $y = x - 1$

La substituïm a l'altra equació $3x + 2y = 3$; $3x + 2(x - 1) = 3$

Resolem l'equació $3x + 2x - 2 = 3$ $5x = 5$ $x = 1$

Substituïm el valor de x a l'equació més fàcil
$y = x - 1$ $y = 1 - 1$ $y = 0$

Solució: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

b) *Mètode d'igualació*
Aïllem la mateixa variable de les dues equacions

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \\ y = x - 1 \end{cases}$$

Igualem segones parts $\frac{-3x}{2} + \frac{3}{2} = x - 1$

Resolem l'equació $-3x+3 = 2x - 2$ $-5x = -5$ $x = 1$

Substituïm el valor de x a l'equació més fàcil
$y = x - 1$ $y = 1 - 1$ $y = 0$

Solució: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

c) *Mètode de reducció*

Multipliquem la segona per 3 $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -3x + 3y = -3 \end{cases}$

Sumem les equacions per eliminar la x, $5y = 0$

Calculem la variable y $y = 0$

Substituïm el valor de y a una de les equacions

$y = x - 1$ $\quad 0 = x - 1$ $\quad x = 1$

Solució: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

RESOLUCIÓ GRÀFICA

1.DISCUSIÓ DE SISTEMES

1

Discutiu els següents sistemes:

1.1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$	Sol. SCD	1.2. $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -x + y = -1 \end{cases}$	Sol. SCD
1.3. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + y = -3 \end{cases}$	Sol. SCD	1.4. $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$	Sol. SCD
1.5. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$	Sol. SCI	1.6. $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -x - \frac{2y}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases}$	Sol. SCI

RAONAMENT

$$\boxed{\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -x - \frac{2y}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{-3}{2}x + \frac{3}{2} \\ y = \frac{-3}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \quad m_1 = m_2 \quad n_1 \neq n_2$$

$\rightarrow$ S. I.

sistemes lineals

1.7. $\begin{cases} 2x - 8y = 12 \\ -x + 4y = -6 \end{cases}$	Sol. SCI	1.8. $\begin{cases} x - y = 5 \\ -2x + 2y = -10 \end{cases}$	Sol. SCI
1.9. $\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$	Sol. SI	1.10. $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -x - \frac{2y}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases}$	Sol. SI
1.11. $\begin{cases} 2x - 8y = 6 \\ -x + 4y = -6 \end{cases}$	Sol. SI	1.12. $\begin{cases} x - y = 5 \\ -2x + 2y = 15 \end{cases}$	Sol. SI

RAONAMENT

$$\boxed{\begin{cases} x - y = 5 \\ -2x + 2y = 15 \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} y = x - 5 \\ y = x + \frac{15}{2} \end{cases} \rightarrow m_1 = m_2 \qquad n_1 \neq n_2$$

$\rightarrow$ S. I.

2.SISTEMES COMPATIBLES DETERMINATS

1

Resoleu:

2.1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$	2.1. Sol. $x=1, y=1$
2.2. $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -x + y = -1 \end{cases}$	2.2. Sol. $x=1, y=0$
2.3. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + y = -3 \end{cases}$	2.3. Sol. $x=2, y=-1$

2.4. $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$	2.4. Sol. $x=3, y=-2$
2.5. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$	2.5. Sol. $x=0, y=1$

Mètode de substitució

$$\boxed{\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} y = -x+1 \\ 2x-(-x+1) = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -x+1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

2.6. $\begin{cases} x - y = 3 \\ -x + 3y = -1 \end{cases}$	2.6. Sol. $x=4, y=1$
2.7. $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}$	2.7. Sol. $x=2, y=1$
2.8. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$	2.8. Sol. $x=-2, y=3$
2.9. $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$	2.9. Sol. $x=1, y=2$
2.10. $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + y = 8 \end{cases}$	2.10. Sol. $x=1, y=1$

Mètode d'igualació

$$\boxed{\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + y = 8 \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5-3x}{2} \\ y = 8-7x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{5-3x}{2} = 8-7x \\ y = 8-7x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

2.11. $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 23 \end{cases}$	2.11. Sol. x=10, y=-3
2.12. $\begin{cases} 5x - 6y = 3 \\ 7x - 2y = 17 \end{cases}$	2.12. Sol. x=3, y=2
2.13. $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$	2.13. Sol. x=4, y=1
2.14. $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$	2.14. Sol. x=1, y=3
2.15. $\begin{cases} 3x - y = -5 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$	2.15. Sol. x=-1, y=2

Mètode de reducció

$$\boxed{\begin{cases} 3x - y = -5 \\ 2x + y = 0 \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} 6x - 2y = -10 \\ -6x - 3y = 0 \end{cases} \rightarrow (\text{sumand}) \rightarrow$$

$$-5y=-10 \rightarrow y=2 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

2.16. $\begin{cases} 5x + 3y = -1 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$	2.16. Sol. x=1, y=-2

2.17. $\begin{cases} 12x - 7y = 3 \\ 15x - 3y = 21 \end{cases}$	2.17. Sol. $x=2, y=3$
2.18. $\begin{cases} 4x + 12y = -8 \\ 5x - y = 6 \end{cases}$	2.18. Sol. $x=1, y=-1$
2.19. $\begin{cases} 3x + 5y = 12 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$	2.19. Sol. $x=-1, y=3$
2.20. $\begin{cases} 7x - 3y = -5 \\ 5x + y = 9 \end{cases}$	2.20. Sol. $x=1, y=4$

Mètode de substitució

$$\boxed{\begin{cases} 7x - 3y = -5 \\ 5x + y = 9 \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} y = 9 - 5x \\ 7x - 3(9-5x) = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 9 - 5x \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

2.21. $\begin{cases} 2(x-3) = 2y \\ 2x - y = 5 \end{cases}$	2.21. Sol. $x=2, y=-1$
2.22. $\begin{cases} 5(x+2) = y \\ 2x + y = 3 \end{cases}$	2.22. Sol. $x=-1, y=5$
2.23. $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2(x+1) = 2y \end{cases}$	2.23. Sol. $x=1, y=2$
2.24. $\begin{cases} 2x + y = -5 \\ 3(x-2y) = 15 \end{cases}$	2.24. Sol. $x=-1, y=-3$

2.25. $\begin{cases} 3x = 3(y-1) \\ 2 = 2(2x-y) \end{cases}$	2.25. Sol. $x=2, y=3$

Mètode d'igualació

$$\boxed{\begin{cases} 3x = 3(y-1) \\ 2 = 2(2x-y) \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ y = 2x-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ x+1 = 2x-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

2.26. $\begin{cases} 2(3x-2) = -5y \\ 3(2x+3y) = 12 \end{cases}$	2.26. Sol. $x=-1, y=2$
2.27. $\begin{cases} x = 2(4-y) \\ y-3 = x-5 \end{cases}$	2.27. Sol. $x=4, y=2$
2.28. $\begin{cases} x+3y = x-6 \\ x-1 = 2y+2x \end{cases}$	2.28. Sol. $x=3, y=-2$
2.29. $\begin{cases} 3(x-2y+1) = -3y \\ x+5y = 2x+3y+3 \end{cases}$	2.29. Sol. $x=1, y=2$
2.30. $\begin{cases} 4x-y = 3(x-3+y) \\ 3x+5y = -3x+2y \end{cases}$	2.30. Sol. $x=-1, y=2$

Mètode de reducció

$$\boxed{\begin{cases} 4x-y = 3(x-3+y) \\ 3x+5y = -3x+2y \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} x-4y = -9 \\ 2x+y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x+8y = 18 \\ 2x+y = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \quad 9y = 18 \quad \rightarrow \quad y = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$	
2.31. $\begin{cases} x + y = 8 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3 \end{cases}$	2.31. Sol. x=2, y=6
2.32. $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x - \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$	2.32. Sol. x=1, y=4
2.33. $\begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 2 \end{cases}$	2.33. Sol. x=-3, y=6
2.34. $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ \frac{x}{3} + 2y = 5 \end{cases}$	2.34. Sol. x=9, y=1
2.35. $\begin{cases} \frac{x}{2} - y = -2 \\ x - \frac{y}{2} = 2 \end{cases}$	2.35. Sol. x=4, y=4
Mètode de substitució	

$$\boxed{\begin{cases} \frac{x}{2} - y = -2 \\ x - \frac{y}{2} = 2 \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y - 4 \\ 2(2y-4) - y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

2.36. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = 1 \end{cases}$	2.36. Sol. x=6, y=-4
2.37. $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1 \end{cases}$	2.37. Sol. x=2, y=-3
2.38. $\begin{cases} 3x = 6y \\ \frac{x}{2} = \frac{3y}{2} - 1 \end{cases}$	2.38. Sol. x=4, y=2
2.39. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{5} = 1 \end{cases}$	2.39. Sol. x=3, y=5
2.40. $\begin{cases} \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{3} = 1 \\ 2x - \frac{3y}{4} = 1 \end{cases}$	2.40. Sol. x=2, y=4

Mètode d'igualació $\boxed{\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} + \dfrac{x+y}{3} = 1 \\ 2x - \dfrac{3y}{4} = 1 \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} 3x-3y+2x+2y=6 \\ 8x-3y=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x-y=6 \\ 8x-3y=4 \end{cases}$ $\rightarrow \begin{cases} y=5x-6 \\ y=\dfrac{8x-4}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=5x-6 \\ 5x-6=\dfrac{8x-4}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=2 \end{cases}$	
2.41. $\begin{cases} \dfrac{3x}{6} + \dfrac{y}{4} = 1 \\ \dfrac{2x}{10} - \dfrac{y}{6} = \dfrac{14}{15} \end{cases}$	2.41. Sol. x=3, y=-2
2.42. $\begin{cases} x = 3y \\ \dfrac{2x}{3} = \dfrac{7y}{5} + 3 \end{cases}$	2.42. Sol. x=15, y=5
2.43. $\begin{cases} 3x - \dfrac{2y}{7} = 4 \\ y - 6 = x-1 \end{cases}$	2.43. Sol. x=2, y=7
2.44. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y} = 2 \\ \dfrac{x}{y+1} = 1 \end{cases}$	2.44. Sol. x=3, y=2

2.45. $\begin{cases} 3(x-y) = 2x+1 \\ 4x-15y = -2x \end{cases}$	2.45. Sol. $x=-5, y=-2$

Mètode de reducció

$$\boxed{\begin{cases} 3(x-y) = 2x+1 \\ 4x-15y = -2x \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-5y=0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2x+6y=-2 \\ 2x-5y=0 \end{cases} \Rightarrow y=-2 \rightarrow \begin{cases} x=1+3y=-5 \\ y=-2 \end{cases}$$

2.46. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = 5 \\ \dfrac{3x}{3+3y} = 1 \end{cases}$	2.46. Sol. $x=3, y=2$
2.47. $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{x} = 4 \\ 2x+3y = 4 \end{cases}$	2.47. Sol. $x=-1, y=2$
2.48. $\begin{cases} \dfrac{5x}{x+y} = 2 \\ 3x-2y = x-2 \end{cases}$	2.48. Sol. $x=2, y=3$
2.49. $\begin{cases} \dfrac{3x}{2x+y} = 2-\dfrac{1}{5} \\ 2x+3y = 3 \end{cases}$	2.49. Sol. $x=3, y=-1$

2.50. $\begin{cases} x + 5y = 2x \\ \frac{3x}{2} - 3y = \frac{9}{2} \end{cases}$	2.50. Sol. $x=5, y=1$

3. SISTEMES COMPATIBLES INDETERMINATS

3.1. $\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3 \end{cases}$	3.1 Sol. $x=2t, y=9-3t$
3.2. $\begin{cases} y = 12x-8 \\ 3x - \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$	3.2 Sol. $x= t , y=12t-8$
3.3. $\begin{cases} -2x + 3y = -12 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 2 \end{cases}$	3.3 Sol. $x= 3t , y=2t-4$
3.4. $\begin{cases} x + 6y = 15 \\ \frac{x}{3} + 2y = 5 \end{cases}$	3.4 Sol. $x= 5-6t , y =t$
3.5. $\begin{cases} \frac{x}{2} - y = -2 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$	3.5 Sol. $x= 2t , y =t+2$

Mètode d'igualació $\boxed{\begin{cases} \frac{x}{2} - y = -2 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{x+4}{2} \\ y = \frac{x+4}{2} \end{cases} \rightarrow y = \frac{x+4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{2t+4}{2} = t+2 \end{cases}$	
3.6. $\begin{cases} 16x + 18y = 24 \\ \frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = 1 \end{cases}$	3.6 Sol. $x = t$, $y = (12-8t)/9$
3.7. $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ \frac{x}{3} + \frac{2y}{9} = 0 \end{cases}$	3.7 Sol. $x = 2t$, $y = -3t$
3.8. $\begin{cases} x - 3y = -2 \\ \frac{x}{2} = \frac{3y}{2} - 1 \end{cases}$	3.8 Sol. $x = 3t-2$, $y = t$
3.9. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = \frac{1}{6} \end{cases}$	3.9 Sol. $x = t$, $y = 2t-1$

3.10. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} + \dfrac{x+y}{3} = 1 \\ y = 5x-6 \end{cases}$	3.10 Sol. $x = t$, $y = 5t-6$

Mètode d'igualació

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} + \dfrac{x+y}{3} = 1 \\ y = 5x-6 \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} y = 5x-6 \\ y = 5x-6 \end{cases} \rightarrow y = 5x-6 \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 5t-6 \end{cases}$$